Lời giải một số câu khó.

Câu 42: Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|x^4-8x^2+m\right|$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 18. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 7. B. 0. C. 9. D. -2.

Đáp án A.

Giải phương trình $4x^3-16x=0$ thì $x=2\in[1;3]$. Từ đó $\max\limits_{[1;3]} f(x)=\max\left\{f(1), f(2), f(3)\right\}=\max\{|m-7|,|m-16|,|m+9|\}=\max\left\{|m-16|,|m+9|\right\}=18$

Khi đó ta tìm được $m=9, m=-2$ thỏa mãn.

Câu 44: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $\left|2z-i\right|=\left|2+iz\right|$, biết $\left|z_1-z_2\right|=1$. Giá trị của biểu thức $P=\left|z_1+z_2\right|$ bằng

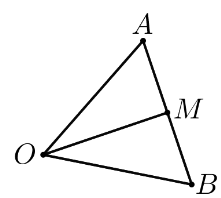
A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải. Gọi $z=x+yi\ \ (x;y\in\mathbb{R})$. Từ giả thiết, ta có

$$\left|2x+(2y-1)i\right|=\left|2-y+xi\right|\Leftrightarrow\sqrt{(2x)^2+(2y-1)^2}=\sqrt{(2-y)^2+x^2}\Leftrightarrow x^2+y^2=1.$$

Suy ra $|z_1|=|z_2|=\sqrt{x^2+y^2}=1$.



Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1, z_2.

Theo giả thiết: $\begin{cases}|z_1|=1\Rightarrow OA=1\\|z_2|=1\Rightarrow OB=1\\|z_1-z_2|=1\Rightarrow AB=1\end{cases}$.

Suy ra OAB là tam giác đều cạnh bằng 1 nên $P=\left|z_1+z_2\right|=2.OM=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ với M là trung điểm của AB (tham khảo hình vẽ).

Câu 45: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3f\left(x^2-4x\right)=m+5$ có ít nhất 5 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $\left(0;+\infty\right)$ là

A. 13. B. 11. C. 12. D. 14.

Đáp án B.

Đặt $u=x^2-4x\,(1)$

Ta có BBT sau:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
u		0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Ta thấy:

+ Với $u<-4$, phương trình (1) vô nghiệm.
+ Với $u=-4$, phương trình (1) có một nghiệm $x=2>0$.
+ Với $-4<u<0$, phương trình (1) có hai nghiệm $x>0$.
+ Voi $u\ge 0$, phương trình (1) có một nghiệm $x>0$

Khi đó $3f\left(x^2-4x\right)=m+5\Rightarrow f\left(u\right)=\dfrac{m+5}{3}\,(2)$, ta thấy chỉ trong trường hợp $-2<\dfrac{m}{3}<2\Leftrightarrow -6<m<6$, phương trình (2) có một nghiệm $u<-4$, hai nghiệm $u\in\left(-4;0\right)$ và một nghiệm $u>0$ nên phương trình đã cho có năm nghiệm $x>0$.

Câu 46: Có bao nhiêu số nguyên a thuộc đoạn $[-20;20]$ sao cho hàm số $y=-2x+2+a\sqrt{x^2-4x+5}$ có cực đại ?

A. 35. B. 36. C. 18. D. 17.

Đáp án C.

Ta có $y'=-2+\dfrac{a(x-2)}{\sqrt{x^2-4x+5}}=0\Leftrightarrow a(x-2)=2\sqrt{x^2-4x+5}\Leftrightarrow\begin{cases}a(x-2)>0\\(a^2-4)\left(x-2\right)^2=4\end{cases}$

Như vậy để hàm số cớ cực trị thì $|a|>2$. Tuy nhiên chỉ khi $a<0$ thì y' đổi dấu từ dương sang âm. Do đó $a\in[-20;-3]$, và có 18 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 47: Cho hình vuông $ABCD$ có các đỉnh A,B,C tương ứng nằm trên các đồ thị của các hàm số $y=\log_a x$, $y=2\log_a x$ và $y=3\log_a x$. Biết rằng diện tích hình vuông bằng 36, cạnh AB song song với trục hoành. Khi đó a bằng

A. $\sqrt[6]{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt[3]{6}$. D. $\sqrt{6}$.

Đáp án A.

Do diện tích hình vuông là 36 nên cạnh hình vuông bằng 6.

Cũng từ thứ tự các đỉnh suy ra a>1.

Giả sử $A(x;y)$ thì $B(x;y+6)$ và $C(x-6,y)$. Suy ra $\begin{cases}\log_a x+6=2\log_a x\\ 3\log_a(x-6)=\log_a x\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_a x=6\\ 3\log_a(a^6-6)=6\end{cases}$. Ta được phương trình $a^6-6=a^2$. Từ đó $a=\sqrt[6]{3}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $f(x)+f(2-x)=x^2-2x+2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tích phân $\int\limits_0^2 xf'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{5}{3}$. B. $-\frac{10}{3}$. C. $-\frac{7}{3}$. D. $-\frac{11}{3}$.

Đáp án B.

Ta có $\int\limits_0^2 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^2-\int\limits_0^2 f(x)dx = 2f(2)-\int\limits_0^2 f(x)dx$

Lại có $f(0)+f(2)=2, f(0)=3$ nên $f(2)=-1$.

Bằng cách đổi biến $x=2-t$ ta được $\int\limits_0^2 f(x)dx=\int\limits_0^2 f(2-t)dt$. Suy ra

$\int\limits_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(f(x)+f(2-x)\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^2\left(x^2-2x+2\right)dx=\frac{4}{3}$.

Từ đó tích phân cần tính bằng $-2-\frac{4}{3}=-\frac{10}{3}$.

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(2;1;0), C(2;0;2)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa BC và cách A một khoảng lớn nhất. Hỏi vectơ nào sau đây là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) ?

A. $\vec{n}=(5;2;-1)$. B. $\vec{n}=(5;-2;-1)$. C. $\vec{n}=(5;2;1)$. D. $\vec{n}=(-5;2;-1)$.

Đáp án B.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC, suy ra $H\left(2;\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$.

Mặt phẳng (P) cần tìm thỏa mãn bài toán, khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH}$ là một VTPT.

Do đó một vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{AH}=\left(1;-\frac{2}{5};-\frac{1}{5}\right) // \vec{n}=(5;-2;-1)$.

Câu 50: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B, $\widehat{SAB}=\widehat{SCB}=90^\circ$, $AB=a, BC=2a.$ Biết rằng góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60°, thể tích khối chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}.$ B. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}.$ C. $a^3.$ D. $\dfrac{a^3\sqrt{5}}{6}.$

Đáp án A.

Lấy M là trung điểm SB. Từ giả thiết suy ra M cách đều 4 điểm S, A, B, C. Do đó, khi kẻ MH vuông góc mp (ABC) thì H là tâm đường trò ngoại tiếp tam giác ABC. Lại do góc B vuông nên H là trung điểm AC.

Dễ có góc MBH bằng 60 độ và $AC=a\sqrt{5}.$ Suy ra $MH=\sqrt{3}.BH=\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.$

Từ đó $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.2MH.S_{ABC}=\dfrac{1}{3}.a\sqrt{15}.\dfrac{1}{2}.a.2a=\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.